Satisfiability Checking for the Coalgebraic μ-Calculus

Erfüllbarkeitsprüfung für den Koalgebraischen μ-Kalkül

Daniel Hausmann

28. Juni 2018

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

Automaten

Automaten über endlichen Wörtern

Endlicher Automat (EA): $\mathsf{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$,
endliche Zustandsmenge Q, endliches Alphabet Σ, Transitionsrelation $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, initialer Zustand $q_0 \in Q$, Menge $F \subseteq Q$ akzeptierender Zustände.

Automat A *deterministisch*: Für alle $a \in \Sigma$ und $q \in Q$, $|\{q' \in Q \mid (q, a, q') \in \delta\}| \leq 1$.

Akzeptanz

Für $w \in \Sigma^*$:

$$w \in L(\mathsf{A}) \Leftrightarrow \text{Es existiert Lauf } \rho \in \mathsf{run}(\mathsf{A}, w, q_0)\text{, der in } F \text{ endet.}$$

Automaten über unendlichen Wörtern

Paritätsautomat (PA): $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \alpha)$,
Wie EA, jedoch mit Prioritätsfunktion $\alpha : Q \to \mathbb{N}$

Akzeptanz

Für $w \in \Sigma^\omega$: $w \in L(\mathsf{A})$ g.d.w. Lauf $\rho \in \mathsf{run}(\mathsf{A}, w, q_0)$ existiert,
sodass $\max(\mathsf{Inf}(\alpha \circ \rho))$ gerade ist.

Büchi-Automat (BA): PA mit $\alpha : Q \to \{1, 2\}$, $F = \alpha(2)$, $\overline{F} = \alpha(1)$

Co-Büchi-Automat (CBA): PA mit $\alpha : Q \to \{0, 1\}$, $F = \alpha(0)$, $\overline{F} = \alpha(1)$

Limes-Eigenschaften von ω-Automaten

Limes-linearer Co-Büchi-Automat (LLCBA)

CBA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \alpha)$ in dem für alle $q \in F = \alpha(0)$ gilt:

$$\mathrm{reach}(q) \setminus \{q\} \text{ ist durch } \delta^* \text{ linear geordnet.}$$

Limes-deterministischer Paritätsautomat (LDPA)

Jeder akzeptierende Lauf ist ab gewissem Zeitpunkt deterministisch.

Determinisierung

Determinisierungprozeduren:

Quelle	Methode	Ziel	Größe
NEA	Potenzmengen – Rabin, Scott (1959)	DEA	$\leq 2^n$
LLCBA	Serialisierung	DCBA	$\leq n^2 \cdot 2^n$
NCBA	Miyano, Hayashi (1984)	DCBA	$\leq 3^n$
LDBA	Permutationen - Esparza et. al. (2017)	DPA	$\mathcal{O}(n!)$
LDPA	via LDBA – H., Schröder, Deifel (2018)	DPA	$\mathcal{O}((nk)!)$
NBA	Safra (1988), Piterman (2007)	DPA	$\mathcal{O}((n!)^2)$
NPA	via NBA – King, Kupferman, Vardi (2001)	DPA	$\mathcal{O}(((nk)!)^2)$

n Zustände (k Prioritäten)

Determinisierung II

Makrozustände in determinisierten Automaten sind bei ...

... Potenzmengenkonstruktion (NEA) Mengen $U \in \mathcal{P}(Q)$

... Serialisierungsmethode (LLCBA) Tupel $(q, t, U) \in Q \times Q \times \mathcal{P}(Q)$

... Miyano/Hayashi-Methode (NCBA) Paare $(U, V) \in \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q)$ mit $U \subseteq V$

... Safra/Piterman-Konstruktion (NBA) *Safra-Bäume* über Q

... Permutationskonstruktion (LDBA) *Partielle Permutationen* von Q

Logik

Modallogik

Modallogik: Fragment von FOL, entscheidbar, beschreibt Graphen.

Syntax:

$\phi, \psi := \top \mid \bot \mid p \mid \neg p \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond\phi \mid \Box\phi \qquad p \in \mathbf{P}$

($\mathbf{P}$ Menge von Atomen mit $\neg\neg p = p$)

Semantik:

Modelle: *Kripke-Strukturen* (W, R, π) mit Zustandsmenge W, Transitionsrelation $R \subseteq W \times W$, Valuation der Atome $\pi : \mathbf{P} \to \mathcal{P}(W)$.

$$[\![\Diamond\phi]\!] = \{w \in W \mid R(w) \cap [\![\phi]\!] \neq \emptyset\} \qquad [\![\phi \wedge \psi]\!] = [\![\phi]\!] \cap [\![\psi]\!]$$

$$[\![\Box\phi]\!] = \{w \in W \mid R(w) \subseteq [\![\phi]\!]\} \qquad [\![p]\!] = \pi(p) \qquad \dots$$

wobei $R(w) = \{u \in W \mid (w, u) \in R\}$.

Formel ϕ *erfüllbar*: Es gibt Modell, das Zustand x mit $x \in [\![\phi]\!]$ enthält.

Der Modale μ-Kalkül (Kozen 1983)

Modaler μ-Kalkül: Erweitert Modallogik um *Fixpunktoperatoren*.

Syntax:

$$\phi, \psi := \top \mid \bot \mid p \mid \neg p \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond\phi \mid \Box\phi \mid X \mid \mu X.\phi \mid \nu X.\phi \qquad p \in \mathbf{P}, X \in \mathbf{V}$$

(**P**,**V** Mengen von Atomen und *Fixpunktvariablen*)

Semantik:

Wie zuvor, ergänzt um

$$\llbracket \mu X.\phi \rrbracket_\sigma = \bigcap \{ Y \subseteq X \mid Y \subseteq \llbracket \phi \rrbracket_\sigma^X (Y) \}$$
$$\llbracket \nu X.\phi \rrbracket_\sigma = \bigcup \{ Y \subseteq X \mid \llbracket \phi \rrbracket_\sigma^X (Y) \subseteq Y \}$$

Fragmente:

Linear – Nur eine Fixpunktvariable, stets einfach verwendet

Alternierungsfrei – Fixpunkte nicht abhängig alternierend geschachtelt

Akonjunktiv – Höchstens eine *aktive μ-Variable* in Konjunktionen

Der Koalgebraische μ-Kalkül (Cirstea et. al., 2009)

Anstelle von $\Diamond$ und $\Box$: generelle Modaloperatoren $\heartsuit \in \Lambda$.

Syntax:

$$\phi, \psi := \top \mid \bot \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \heartsuit\phi \mid X \mid \mu X.\phi \mid \nu X.\phi \qquad \heartsuit \in \Lambda, X \in \mathbf{V}$$

Prädikatenliftings: natürliche Transformationen
$[\![\heartsuit]\!]_W : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(TW)$, für **Set**-Endofunktor T, Menge W.

Semantik:

Modelle: T-*Koalgebren* $(W, \xi : W \to TW)$ anstatt Kripke-Strukturen.
Voraussetzung: Monotone Prädikatenliftings ($A \subseteq B \Rightarrow [\![\heartsuit]\!]A \subseteq [\![\heartsuit]\!]B$).

Extension wie zuvor, aber mit modaler Klausel $[\![\heartsuit\phi]\!] = \xi^{-1}[[\![\heartsuit]\!]_W[\![\phi]\!]]$.

Instanzen: modaler μ-Kalkül (z.B. $\mu X.(p \vee \Diamond X) = \mathsf{EF}p$): $T = \mathcal{P}$;
probabilistischer μ-Kalkül (z.B. $\mu X.(p \vee L_{\frac{1}{3}} X)$): $T = \mathcal{D}$, Modelle: Markov-Ketten; alternating-time μ-calculus (z.B. $\mu X.(p \vee \langle D \rangle X)$); ...

Spiele

Unendliche Spiele

Paritätsspiel: $S = (V, E, \alpha)$, gespielt von Eloise ($\exists$) und Abelard ($\forall$), endliche Knotenmenge $V = V_\exists \cup\!\!\!\cdot\; V_\forall$, Züge $E \subseteq V \times V$, Prioritätsfunktion $\alpha : V \to \mathbb{N}$

Gewinnbedingung

Für *Spielverlauf* $\rho \in V^\omega$ mit $(\rho(i), \rho(i+1)) \in E$ für $i \geq 0$:

Spielerin Eloise gewinnt ρ g.d.w. $\max(\mathsf{Inf}(\alpha \circ \rho))$ gerade ist.

Eloise gewinnt Knoten $v \in V$ g.d.w. sie Strategie hat, mit der sie jeden bei v startenden Spielverlauf gewinnt.

Büchi-Spiel: Paritätsspiel mit $\alpha : V \to \{1, 2\}$, $F = \alpha(2)$, $\overline{F} = \alpha(1)$

Erfüllbarkeitsspiele

Erfüllbarkeitsspiel für ϕ via Determinisierung:

1. Definiere Tracking-Automat als NPA A der Größe $n = |\phi|$ mit $L(\mathsf{A}) = \mathsf{BadBranches}(\phi)$.
2. Determinisiere A, erhalte DPA B $:= \mathsf{Det}(\mathsf{A})$ mit $L(\mathsf{A}) = L(\mathsf{B})$.
3. Komplementiere B, erhalte $C := \mathsf{Komp}(\mathsf{B})$ mit $L(\mathsf{C}) = \overline{L(\mathsf{A})}$.
4. Definiere Spiel DS_ϕ über Trägermenge von C, Züge entsprechen *Ein-Schritt-Tableau-Regeln*, verfolgen zudem Formeln.

Theorem

Spielerin Eloise gewinnt Erfüllbarkeitsspiel $\mathsf{DS}_\phi \Leftrightarrow \phi$ ist erfüllbar.

Erfüllbarkeitsspiele – Resultate

Überblick Erfüllbarkeitsspiele via Determinisierung:

Fragment	Tracking-Automat	Spieltyp	Spiel-/Modellgröße
linear	LLCBA	Büchi-Spiel	$\leq n^2 \cdot 2^n$
alternierungsfrei	NCBA	Büchi-Spiel	$\leq 3^n$
akonjunktiv	LDPA	Paritätsspiel	$\mathcal{O}((nk)!)$
unbeschränkt	NPA	Paritätsspiel	$\mathcal{O}(((nk)!)^2)$

Formelgröße n, Alternierungsstiefe k

Offene Frage *R. Goré, IJCAR 2014*: Gibt es ExpTime-Erfüllbarkeits-Algorithmus für CTL, der Global Caching verwendet?

Erkenntnis: Global Caching **ist** *on-the-fly*-Spiel-Lösen! Antwort: Ja.

Erfüllbarkeitsspiele II

Für akonjunktive und alternierungsfreie Formeln:

Erfüllbarkeitsspiel für ϕ via Fokussierung:

1. Definiere Tracking-Automat A der Größe $n = |\phi|$ mit $L(\mathsf{A}) = \mathsf{BadBranches}(\phi)$.
2. Definiere Büchi-Spiel FS_ϕ über $\mathsf{Cl}(\phi) \times \mathcal{P}(\mathsf{Cl}(\phi))$, Züge entsprechen Ein-Schritt-Tableau-Regeln, verfolgen zudem fokussierte Formel. Wenn fokussierte Formel nicht mehr verfolgbar, refokussiert Abelard (d.h. wählt neue fokussierte Formel). Eloise gewinnt, wenn unendlich oft refokussiert wird.

Theorem

Für ϕ akonjunktiv und alternierungsfrei gilt: Spielerin Eloise gewinnt Fokussierungsspiel $\mathsf{FS}_\phi \Leftrightarrow \phi$ ist erfüllbar.

Erfüllbarkeitsspiele – Resultate II

Erfüllbarkeitsspiele via Fokussierung für alternierungsfreie, akonjunktive Formeln geeignet, liefert Büchi-Spiele mit Spielgröße $n \cdot 2^n$. **Aber:** Modellgröße $n \cdot 3^n$.

Implementierung

Implementierung

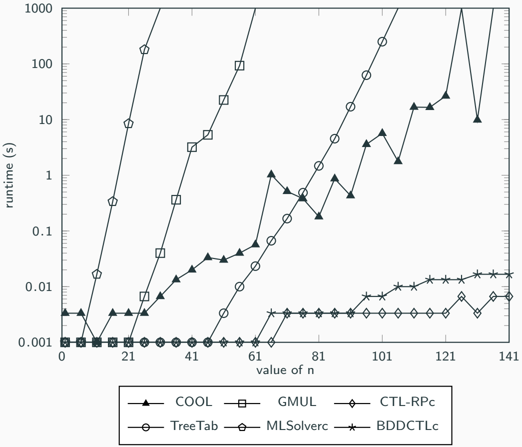
Erfüllbarkeitsspiele in koalgebraischer Allgemeinheit innerhalb des *Coalgebraic Ontology Logic Reasoner* (COOL) implementiert.

Implementierung verwendet Global Caching, unterstützt *on-the-fly*-Lösen, verwendet bestmögliche Determinisierungsmethode.

Sourcen, Binaries, Formelgenerator, Benchmarking-Skripte:

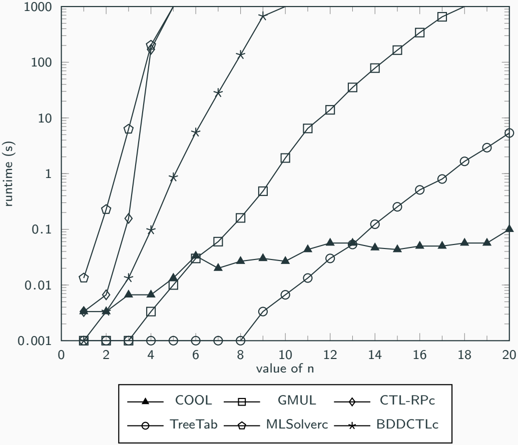
`https://www8.cs.fau.de/research:software:cool`

Vergleich, CTL-Beweiser



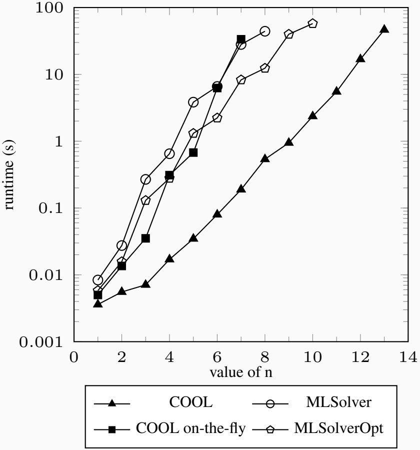
Montali-Formeln
(CTL-Formeln, erfüllbar)

Vergleich, CTL-Beweiser



early$(n, 4, 2)$
(CTL-Formeln, unerfüllbar)

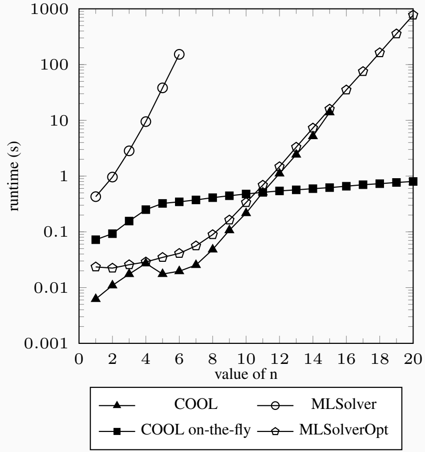
Vergleich, μ-Kalkül-Beweiser



"Paritätsspiele mit *n* Prioritäten können zu Paritätsspielen mit 3 Prioritäten transformiert werden, ohne Eloise's Gewinnregion zu verkleinern."

(akonjunktive μ-Kalkül-Formeln, unerfüllbar)

Vergleich, μ-Kalkül-Beweiser



$\text{early}_{\text{ac}}(n, 4, 2)$
(akonjunktive μ-Kalkül-Formeln, unerfüllbar)

Zusammenfassung

Resultate:

- Bessere Determinisierungsmethoden für limes-lineare CBA ($n^2 \cdot 2^n$ vs. 3^n), limes-deterministische PA ($\mathcal{O}((nk)!)$ vs. $\mathcal{O}(((nk)!)^2)$)
- Erfüllbarkeitsspiele (via Determinisierung und via Fokussierung) in koalgebraischer Allgemeinheit, mithilfe von Ein-Schritt-Tableau-Regeln
- Implementierung (koalgebraisch, on-the-fly) als Teil von COOL
  "schnellster CTL-Beweiser und schnellster μ-Kalkül-Beweiser der Welt"

Neue Fragen:

- Erfüllbarkeitsspiele mittels Ein-Schritt-Modellen?
- Erfüllbarkeitsspiele als alternierende T-Automaten?
- On-the-fly Minimierung des Tracking-Automaten?

References i

C. Cîrstea, C. Kupke, and D. Pattinson.
EXPTIME tableaux for the coalgebraic μ-calculus.
In *Computer Science Logic, CSL 2009*, volume 5771 of *LNCS*, pages 179–193. Springer, 2009.

J. Esparza, J. Kretínský, J. Raskin, and S. Sickert.
From LTL and limit-deterministic büchi automata to deterministic parity automata.
In *Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems, TACAS 2017*, volume 10205 of *LNCS*, pages 426–442. Springer, 2017.

D. Hausmann and L. Schröder.
Global caching for the flat coalgebraic μ-calculus.
In *Temporal Representation and Reasoning, TIME 2015*, pages 121–143. IEEE Computer Society, 2015.

D. Hausmann, L. Schröder, and H.-P. Deifel.
Permutation games for the weakly aconjunctive μ-calculus.
In *Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems, TACAS 2018*, volume 10205–10206 of *LNCS*. Springer, to appear.

D. Hausmann, L. Schröder, and C. Egger.
Global caching for the alternation-free coalgebraic μ-calculus.
In *Concurrency Theory, CONCUR 2016*, volume 59 of *LIPIcs*, pages 34:1–34:15. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2016.

D. Kozen.
A finite model theorem for the propositional μ-calculus.
Studia Logica, 47:233–241, 1988.

S. Miyano and T. Hayashi.
Alternating finite automata on ω-words.
Theoretical Computer Science, 32:321–330, 1984.

N. Piterman.
From nondeterministic büchi and streett automata to deterministic parity automata.
Logical Methods in Computer Science, 3(3):5, 2007.

S. Safra.
On the complexity of omega-automata.
In *Foundations of Computer Science, FOCS 1988*, pages 319–327. IEEE Computer Society, 1988.